A

ALGEBRA

INSIEME N E INSIEME Q_a

L'insieme N dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali è l'insieme dei numeri interi non negativi, cioè $N=\{0,1,2,3,\ldots\}$. N è un insieme infinito, ordinato e discreto.

Operazioni tra numeri naturali

Addizione: $a+b=c$ con $a, b, c \in N$.
Sottrazione: $a-b=c$ con $a, b \in N$.
Moltiplicazione: $a \cdot b=c$ con $a, b, c \in N$.
Divisione: $a:b=c$ con $a, b \in N$ e $b \neq 0$.

Ricorda

- L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni interne a N, cioè il loro risultato è ancora un numero naturale.
- L'elemento neutro dell'addizione è 0, mentre l'elemento neutro della moltiplicazione è 1; pertanto: $a+0=a$ e $a \cdot 1=a$, mentre $a+1 \neq a$ e $a \cdot 0=0$.
- $a:0$, con $a \neq 0$ è impossibile; $0:0$ è indeterminato.
- La sottrazione e la divisione non sono operazioni interne a N, cioè il loro risultato non è sempre un numero naturale.

COMPLETA

1 **Dopo avere ripassato le proprietà delle operazioni, completa.**

a Commutativa dell'addizione:	$3+2=$ ....
b .... dell'addizione:	$83-27=(83-3)-(27-3)$
c Associativa dell'addizione:	$2+(7+5)=$ ....
d Legge di annullamento del prodotto:	....
e Distributiva dell'.......................... rispetto alla moltiplicazione:	$5 \cdot (4+\ldots\ldots)=\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots+\ldots\ldots \cdot 6$
f Invariantiva della divisione:	$104:26=(104:2):$ ....
g .... della moltiplicazione:	$10 \cdot 12=12 \cdot 10$
h Associativa della moltiplicazione:	.... $=3 \cdot (2 \cdot 5)$

Potenza: è il prodotto di più fattori uguali tra loro, cioè $a^n=\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots a}_{n \text{ volte}}$ (a è la base; n è l'esponente).

Proprietà delle potenze

$a^n \cdot a^m=a^{n+m}$ → $5^5 \cdot 5^4=5^{4+5}=5^9$

$a^n : a^m=a^{n-m}$ → $7^9:7^7=7^{9-7}=7^2$

$\left(a^n\right)^m=a^{n \cdot m}$ → $\left((3)^4\right)^5=3^{4 \cdot 5}=3^{20}$

$a^n \cdot b^n=(a \cdot b)^n$ → $3^2 \cdot 4^2=(3 \cdot 4)^2=12^2$

$a^n : b^n=(a:b)^n$ → $50^3:25^3=(50:25)^3=2^3$

Ricorda

$a^0 = 1$ per qualunque numero naturale a diverso da 0; 0^0 risulta invece indeterminato.

Attenzione!

Le proprietà delle potenze non sono applicabili con l'addizione e la sottrazione, cioè $a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$. Infatti $3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$, invece $(3+2)^3 = 5^3 = 125$ e $35 \neq 125$.

Espressione numerica: è la combinazione di più operazioni tra numeri.

Ricorda

Nel calcolo di un'espressione numerica bisogna rispettare le seguenti priorità di esecuzione delle operazioni:
- le operazioni in parentesi hanno la precedenza sulle altre;
- moltiplicazioni e divisioni hanno precedenza rispetto ad addizioni e sottrazioni;
- più moltiplicazioni e divisioni di seguito si eseguono nell'ordine in cui si trovano;
- più addizioni e sottrazioni di seguito si eseguono nell'ordine in cui si trovano;
- in presenza di potenze, è indispensabile controllare bene se è possibile l'applicazione delle proprietà delle potenze allo scopo di evitare l'esecuzione di calcoli faticosi e inutili.

COMPLETA

Completa, utilizzando quando possibile le proprietà delle potenze.

2 $\left[\left(5^4 \cdot 5^{32}\right)^2\right]^0 \cdot \left(5^{12} : 5^{10} \cdot 5^4\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3 $2^2 + 2^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots = 7$

4 $\left(6^2 : 2^2\right)^4 : \ldots\ldots\ldots\ldots = 9$

5 $\left(3^5 \cdot 5^5\right)^2 : (15)^9 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

6 $3^5 : 3^3 \cdot 3^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

7 $\left\{\left[\left(15^2\right)\right]^6\right\}^{\ldots\ldots} + 2^3 = 3^2$

ESERCIZI

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

8 $[6 \cdot (17 - 9) : (48 : 2) + 7] \cdot [6 \cdot 3 - 7 - (66 : 3) : (3 \cdot 5 - 13)]$

9 $\left[3^2 + 3 \cdot (10 - 5 + 12 : 3 : 2) + 2\right] : 2^2 + 4^4 : 4^3$

10 $\left\{17 - \left[2 + 2^3 : 2^2 \cdot \left(2^5 : 2^3\right)^2\right] : 17\right\} : \left(3^5 : 3^3 : 3\right)$

11 $\left(12^2\right)^5 : \left(12^2\right)^4 - \left(5^3\right)^5 \cdot 5^2 : \left(5^5\right)^3 + \left[\left(2^4\right)^3\right]^5 : 2^{56} - 3 \cdot \left[\left(20^3 : 4^3\right) : 5^2\right]$

12 $\left(2^4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^4\right) : \left[\left(2 \cdot 7 + 4^2\right) : 3 - 2\right] \cdot \left\{15 - \left[3^5 : 3^4 \cdot \left(3^7 : 3^6\right)^2 + 3\right] : \left[\left(3^2\right)^2 : 3^3\right]\right\}$

Massimo comune divisore (M.C.D.)

Il massimo comune divisore tra due numeri naturali è il maggiore tra i loro divisori comuni.

ESEMPIO 1 Si vuole determinare il M.C.D. tra 28 e 70.
- Fattorizziamo i due numeri e otteniamo: $28 = 2^2 \cdot 7$; $70 = 2 \cdot 7 \cdot 5$.
- Il M.C.D. si ottiene moltiplicando i fattori comuni ai due numeri, presi con l'esponente minore; nel nostro caso, M.C.D.: $(28; 70) = 2 \cdot 7 = 14$.

Ricorda

Se due o più numeri non hanno fattori comuni, il loro M.C.D. è 1 ed essi si dicono *numeri primi tra loro.*

Minimo comune multiplo (m.c.m.)

Il minimo comune multiplo tra due numeri naturali è il minore tra i loro multipli comuni.

ESEMPIO 2

Si vuole determinare il m.c.m. tra 18 e 60.

- Fattorizziamo i due numeri e otteniamo: $18 = 3^2 \cdot 2$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.
- Il m.c.m. si ottiene moltiplicando i fattori comuni e non comuni ai due numeri, presi con l'esponente maggiore; nel nostro caso, m.c.m.: $(18;60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

ESERCIZI

13 **Calcola M.C.D. e m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri.**

a (168; 720) b (54; 17; 225) c (22; 23; 24)

Per approfondire

- Per realizzare un tappeto Marta impiega 6 giorni, Irene 18 giorni e Stefania 9 giorni. Lavorando insieme, quanti giorni impiegherebbero a effettuare lo stesso tappeto?
- Tre boscaioli, Giorgio, Gianluigi e Claudio, lavorando insieme riescono a tagliare 20 tronchi in 1 ora. Se Giorgio da solo riesce a tagliare 20 tronchi in 2 ore e 30 minuti e Gianluigi 20 tronchi in 5 ore, quanto tempo impiega Claudio a tagliare 20 tronchi?
- Un'urna contiene meno di 1000 palline. Contandole a dozzine, se ne avanza 1; contandole a gruppi di 7 se ne avanza 1; contandole a gruppi di 11, se ne avanza 1. Quante palline contiene l'urna?

Insieme Q_a dei numeri razionali assoluti

L'insieme dei numeri razionali assoluti è l'insieme dei numeri che si possono scrivere come rapporto tra due numeri naturali cioè nella forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$.

La scrittura $\frac{a}{b}$ si chiama frazione (a è il numeratore, b è il denominatore).

Q_a è un insieme infinito, ordinato e denso.

Frazione propria: frazione in cui il numeratore è minore del denominatore.

Frazione impropria: frazione in cui il numeratore è maggiore del denominatore.

Frazione apparente: frazione in cui il numeratore è multiplo del denominatore.

ESEMPIO 3

$\frac{1}{3}$ è una frazione propria; $\frac{5}{3}$ è una frazione impropria; $\frac{36}{9}$ è una frazione apparente.

Frazioni equivalenti: frazioni che hanno lo stesso valore.

ESEMPIO 4 $\frac{4}{3} = \frac{24}{18} = \frac{40}{30}$

Proprietà invariantiva: moltiplicando o dividendo il numeratore e il denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da 0, si ottiene una frazione equivalente a quella data.

ESEMPIO 5 $\frac{6}{8} = \frac{6 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{24}{32} = \frac{24 : 8}{32 : 8} = \frac{3}{4}$

Frazione irriducibile o ridotta ai minimi termini: frazione in cui il numeratore e il denominatore sono primi tra loro.

ESEMPIO 6 $\frac{60}{80}$ non è irriducibile; $\frac{6}{7}$ è irriducibile.

Frazione inversa di un'altra: frazione ottenuta da quella di partenza scambiando il numeratore con il denominatore.

ESEMPIO 7 $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{2}$ sono una l'inversa dell'altra.

Riduzione di una frazione al minimo comune denominatore.

ESEMPIO 8
Vogliamo ridurre al minimo comune denominatore le frazioni $\frac{1}{6}$ e $\frac{8}{15}$.
- Troviamo il m.c.m. tra i denominatori cioè: m.c.m. (6; 15) = 30.
- A ciascuna frazione assegniamo come denominatore il m.c.m. trovato e come numeratore il prodotto del numeratore e del quoto ottenuto tra il m.c.m. e il denominatore: $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$ e $\frac{8}{15} = \frac{16}{30}$.

Ricorda
La riduzione di frazioni allo stesso denominatore permette di confrontarle agevolmente: è maggiore la frazione con numeratore maggiore.

Operazioni tra frazioni

Addizione e sottrazione di frazioni: si riducono le frazioni allo stesso denominatore, poi si scrive una frazione che ha come denominatore il denominatore comune e come numeratore la somma o la differenza dei numeratori.

Moltiplicazione di frazioni: dopo aver fatto tutte le possibili semplificazioni tra i numeratori e i denominatori, si scrive una frazione che ha come numeratore il prodotto dei numeratori e come denominatore il prodotto dei denominatori.

Divisione di frazioni: si moltiplica la prima frazione per l'inverso della seconda.

Potenza di una frazione: si elevano a potenza il numeratore e il denominatore.

A

Ricorda

Per le operazioni valgono le stesse proprietà viste in N; analogamente, per la risoluzione delle espressioni sono valide le stesse regole di precedenza osservate in N.

ESEMPIO 9

$$\left\{\left[\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^0\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=$$

risolviamo le operazioni nelle parentesi tonde:

$$=\left\{\left[\left(\frac{1+2}{10}\right)^2-\left(\frac{10-9}{12}\right)^2:\left(\frac{2+3}{6}\right)^2\right]\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^0\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=$$

$$=\left\{\left[\left(\frac{3}{10}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2:\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^0\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=$$

risolviamo le operazioni nella parentesi quadra, ricordando le priorità:

$$=\left\{\left[\frac{9}{100}-\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{5}\right)^2\right]\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^0\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=$$

$$=\left\{\left[\frac{9}{100}-\frac{1}{100}\right]\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^0\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=$$

$$=\left\{\frac{8}{100}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^0\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left\{\frac{2}{25}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^0\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=$$

risolviamo le operazioni nella parentesi graffa, ricordando le priorità:

$$=\left\{\frac{2}{25}\cdot\frac{25}{36}+\frac{4}{9}\cdot 1\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left\{\frac{1}{18}+\frac{4}{9}\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left\{\frac{1+8}{18}\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=$$

risolviamo con le proprietà delle potenze, dopo avere semplificato le frazioni dove possibile; otteniamo il risultato.

$$=\left\{\frac{9}{18}\right\}^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$$

COMPLETA

14 **Completa la tabella, riducendo ai minimi termini quando possibile.**

A	B	A + B	A − B	A · B	A : B	A^3	$A^2 : B^2$
	$\frac{6}{10}$						$\frac{20}{5}$
		$\frac{6}{7}$				$\frac{8}{27}$	
3					9		
$\frac{15}{6}$				1			

Numeri decimali

Dividendo il numeratore per il denominatore di una frazione si possono ottenere:
- un *numero decimale limitato*, cioè con un numero finito di cifre decimali;
- un *numero decimale periodico*, cioè con una o più cifre decimali che si ripetono all'infinito.

COMPLETA

15 **Completa la tabella.**

Numero decimale	12,4		$1{,}0\overline{2}$		$2{,}\overline{7}$		$0{,}\overline{34}$
Frazione		$\frac{41}{3}$		$\frac{1}{22}$		0,246	

ESERCIZI

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

16 $\left[5\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{7}\left(\frac{3}{2}-1\right)+\frac{3}{2}\left(1-\frac{6}{7}\right)\right]:\frac{1}{7}$

17 $\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{30}\right)+\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)\right]\right\}:\left[\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{35}\right)+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{7}{2}-3\right)\right]:\frac{1}{3}$

18 $\dfrac{\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right):\left(5+\frac{1}{2}\right)^3\cdot 11^2+\frac{7}{25}\cdot\frac{5}{35}\cdot\frac{15}{3}}$

19 $\left[(1{,}15+0{,}1)\cdot 1{,}6-(2{,}5-0{,}4)\cdot\left(0{,}8-\frac{3}{35}\right)\right]^2$

20 $\dfrac{1+4\,(1+0{,}0\overline{6})\cdot(0{,}5-0{,}25)^2}{(0{,}0\overline{6}+0{,}08\overline{3}+0{,}1\overline{6})\cdot 0{,}5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^0$

21 $\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{4}{9}\right)^5:\left(\frac{4}{9}\right)^4-\frac{11}{3}\cdot\frac{22}{66}+\frac{3}{8}-\frac{11}{6}$

22 $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6:\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2\cdot\left((2)^4\right)^2}{\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4:\frac{1}{4}\right]^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}^4:\left(1-\frac{3}{4}\right)^3}$

A

VERIFICA

1 **Individua fra le seguenti uguaglianze quali sono vere, quali false e correggi quelle false.**

a $5^2 \cdot 5^3 = 5^6$ V F ....
b $2^6 - 2^4 = 2^2$ V F ....
c $13^7 : 13^5 = 1$ V F ....
d $\left(2^5\right)^7 = 2^{12}$ V F ....
e $5^2 + 5^3 = 5^5$ V F ....
f $3^2 : 3^2 = 0$ V F ....
g $4^3 : 4^2 = 4$ V F ....
h $\left(2^5\right)^6 = 2^{30}$ V F ....
i $3^3 : 3^3 \cdot 3 = 3^0$ V F ....
j $8^{12} - 8^{12} = 0$ V F ....
k $5 : 0 = 0$ V F ....
l $1^5 = 5$ V F ....
m $0 \cdot 9 = 5$ V F ....

2 **Per ciascuna delle uguaglianze assegnate, indica la proprietà applicata.**

a $4 + 7 = 7 + 4$ ....
b $5 \cdot 3 \cdot 2 = 15 \cdot 2$ ....
c $117 : 27 = 39 : 9$ ....
d $5 + (6 + 3) = (5 + 6) + 3$ ....
e $123 - 15 = 130 - 22$ ....
f $2 \cdot (6 + 13) = 12 + 26$ ....
g $(4 + 2) \cdot 5 = 20 + 10$ ....
h $28 + 21 = (4 + 3) \cdot 7$ ....
i $6 \cdot (4 + 2) = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 2$ ....
j $(48 + 20) : 4 = 12 + 5$ ....

3 **Calcola M.C.D. e m.c.m. dei seguenti numeri.**

a $(162;\ 243;\ 441)$ ....
b $(144;\ 72;\ 108)$ ....
c $(57;\ 19;\ 38)$ ....
d $(33;\ 34;\ 35)$ ....

4 **Due libri di ricette, uno di 288 pagine e l'altro di 448, sono formati da fascicoli che hanno tutti lo stesso numero di pagine. Calcola quanti fascicoli conterrà ciascun libro, se si vuole che il numero delle pagine di ogni fascicolo sia il maggiore possibile.**

5 **Due ciclisti partono nello stesso istante su una pista; uno compie un giro in 40 secondi, l'altro in 90. Quanti secondi passeranno prima che si ritrovino al punto di partenza?**

6 **Sapendo che il M.C.D. $(a;\ b) = 3$ e il m.c.m. $(a;\ b) = 42$, determina a e b. La soluzione è unica?**

7 **Disponi in ordine decrescente i seguenti numeri.**

a $0,\overline{3}$ b $\frac{3}{10}$ c $0,2$ d $0,6\overline{2}$ e $\frac{3}{4}$

8 **Determina un numero che aumentato dei suoi $\frac{2}{3}$ dà 180.**

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

9 $90:\left\{80-4\cdot 9+\left[2\cdot 80:(4\cdot 10)-9:3\right]\right\}:2-1$

10 $\left[5+\left(3^2-9\right)^4\cdot 3^4+\left(6^2-4^2\right)^2:5^2:2^4\right]^4:3^4:2^4$

11 $\left\{\left[20-\left(3+2^2\right)\cdot\left(4^3:4^3+1\right)\right]:3+2^3\right\}:\left[\left(2^3\right)^2:2^5+\left(3\cdot 2+1-5\right)^3:\left(3^5:3^4+2-2^2\right)\right]$

12 $\left[\frac{4}{9}:\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{12}\right)^2:\frac{5}{9}\right]\cdot\left[\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2\right]$

13 $\dfrac{(1+0,\overline{3})\,(1-0,\overline{3})+0,\overline{1}}{\left[(0,5-0,1\overline{6}-0,125)\cdot 12\right]^2}\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$

VERSO IL TRIENNIO E OLTRE

1 Ordina in modo crescente i seguenti numeri: 3^{400}, 4^{200}, 12^{100}.

2 Trova la quarta parte di $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

3 Nella numerazione quaternaria, le quattro sole cifre usate sono 0, 1, 2, 3; per cui, per esempio $(1023)_4=3\cdot 4^0+2\cdot 4^1+0\cdot 4^2+1\cdot 4^3=(75)_{10}$. Scrivi in base 10 i seguenti numeri.

a $(1101)_2$ b $(21032)_4$ c $(2210)_3$

4 Se x e y sono due numeri naturali non nulli tali che $2x=3y$, indica quale delle seguenti relazioni è vera.

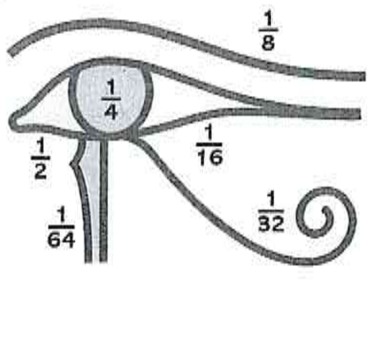
a $x+y$ è dispari.
b xy è sempre pari.
c x è dispari oppure y è dispari.
d x e y sono pari.

5 La somma dei reciproci di due numeri interi positivi è uguale a 2. Indica se la loro somma è:

a uguale a zero;
b dispari;
c uguale al loro doppio prodotto;
d uguale al doppio della loro differenza.

6 Un maglione costa 60 euro. Il prezzo subisce prima un aumento del 5% e successivamente una diminuzione del 5%. Qual è il prezzo finale del maglione?

7 In figura è rappresentato l'occhio di Horus, che nell'antico Egitto era simbolo di regalità e protezione. In base alle tecniche di misurazione dell'antico Egitto, il disegno dell'occhio è composto da differenti frazioni, ciascuna con un preciso significato. Determina la legge che lega tali frazioni.



INSIEME Z E INSIEME Q

L'insieme Z dei numeri interi relativi

L'insieme dei numeri interi relativi è l'insieme dei numeri interi positivi, negativi e dello zero, cioè:
$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Ricorda
Un numero positivo si può scrivere anche senza segno.

Z è un insieme infinito, ordinato e discreto.

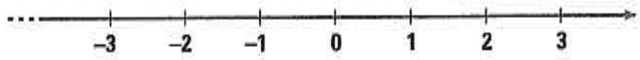
Valore assoluto o modulo di un numero relativo: è il numero stesso preso sempre con il segno + (più), cioè senza segno. Si indica con $|\ldots|$.

Numeri opposti: sono numeri che hanno lo stesso valore assoluto ma segno opposto.

Numeri concordi: sono numeri con lo stesso segno.

Numeri discordi: sono numeri con segno diverso.

Ricorda
I numeri interi relativi si possono rappresentare su una retta orientata (cioè dotata di un verso di percorrenza). Un punto prefissato O rappresenta lo zero; i punti riportati a destra di O sono i numeri positivi e quelli a sinistra i numeri negativi. La rappresentazione dei numeri interi relativi su una retta orientata è molto utile per confrontare due numeri relativi: è maggiore quello che sulla retta si trova più a destra.



Operazioni tra interi relativi

Addizione:
- **se i due numeri sono concordi, la somma è un numero concorde con gli addendi, avente come modulo la somma dei moduli;**
- **se i due numeri sono discordi, la somma è un numero avente come modulo la differenza dei moduli e concorde con il numero di modulo maggiore.**

Sottrazione: si somma al primo numero l'opposto del secondo.

Somma algebrica: è un insieme di somme e differenze tra numeri interi relativi. Poiché le differenze si trasformano in somme, in pratica una somma algebrica diventa una somma.

Ricorda
Per togliere le parentesi in una somma algebrica, bisogna tenere presente che:
- se una parentesi è preceduta dal segno + (più), si toglie la parentesi e si scrivono i numeri in essa contenuta con il proprio segno;
- se una parentesi è preceduta dal segno – (meno), si toglie la parentesi e si scrivono i numeri in essa contenuta con il segno cambiato.

Moltiplicazione:
- se i due numeri sono concordi, il prodotto è un numero positivo avente come modulo il prodotto dei moduli;
- se i due numeri sono discordi, il prodotto è un numero negativo avente come modulo il prodotto dei moduli.

Divisione:
- se i due numeri sono concordi, il quoto è un numero positivo avente come modulo il quoto dei moduli;
- se i due numeri sono discordi, il quoto è un numero negativo avente come modulo il quoto dei moduli.

Ricorda

L'addizione, la moltiplicazione e la sottrazione sono operazioni interne a Z, cioè il loro risultato è ancora un numero intero relativo; la divisione invece non è un'operazione interna a Z, cioè il suo risultato non è sempre un intero relativo.

Potenza: la potenza di un numero intero relativo è numero intero relativo avente come modulo la potenza del modulo della base e segno:
- negativo se la base è negativa e l'esponente è dispari;
- positivo in tutti gli altri casi.

Ricorda

Tutte le proprietà delle operazioni studiate nell'insieme N valgono anche in Z. Per quanto riguarda la semplificazione di espressioni, occorre tenere presente che:
- in presenza di somme, è possibile omettere le parentesi e i segni di somma scrivendo consecutivamente gli addendi;
- in presenza di sottrazioni, è possibile omettere le parentesi e i segni di sottrazione scrivendo consecutivamente minuendo e opposto del sottraendo;
- per le operazioni valgono le stesse priorità considerate in N;
- le somme di più termini possono essere eseguite anche applicando le proprietà commutativa e associativa, che permettono di sommare prioritariamente i termini concordi.

ESEMPIO 1

$\left(-20+2\cdot 3\right)+5\cdot 2-12:\left(-6\right)-16=$ → Risolviamo la moltiplicazione in parentesi:

$=\left(-20+6\right)+5\cdot 2-12:\left(-6\right)-16=$ → risolviamo la somma in parentesi:

$=-14+5\cdot 2-12:\left(-6\right)-16=$ → eseguiamo moltiplicazioni e divisioni nell'ordine in cui compaiono, prestando attenzione ai segni:

$=-14+10+2-16=-18$ → eseguiamo la somma algebrica, ottenendo il risultato.

Attenzione!

Puoi eseguire la somma algebrica anche in questo modo:

$\left(-14-16\right)+\left(10+2\right)=-30+12=-18$.

ESEMPIO 2

$$\left[\underbrace{(-3)^4}_{+} : \underbrace{(3)^2}_{+}\right] \cdot \left[\underbrace{(2)^6}_{+} : \underbrace{(-2)^5}_{-}\right]^2 - 3^4 =$$

Risolviamo le operazioni in parentesi utilizzando le proprietà delle potenze e prestando attenzione ai segni: $(-3)^4 = 3^4$ e $(-2)^5 = -2^5$:

$$= (3)^2 \cdot \left[(-2)^1\right]^2 - 3^4 =$$

risolviamo la potenza di una potenza:

$$= (3)^2 \cdot (-2)^2 - 3^4 =$$

eseguiamo la moltiplicazione utilizzando le proprietà delle potenze con uguale esponente e basi diverse:

$$= \left[3 \cdot (-2)\right]^2 - 3^4 = (-6)^2 - 3^4 =$$

eseguiamo addizioni e sottrazioni nell'ordine in cui compaiono, dopo aver calcolato le potenze, ottenendo il risultato.

$$= 36 - 81 = -45$$

COMPLETA

1 **Completa la tabella.**

A	B	A + B	A – B	A · B	A : B	$A^2 : B^2$	$\lvert A-B \rvert$
–2	3						
		35	49				
0	–9						
–6					3		
				75		9	
7	0						

ESERCIZI

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

2 $\left\{\left[\left((-3)^6\right)^3\right]\right\}^2 : \left[(-3)^5 \cdot (-3)^7\right]^2 : \left[(-3)^2\right]^5$

3 $(-8 + 3 - 4) - \left[+7 - 2 + 4 - (-3 + 1)\right] - \left\{-2 + \left[-3 - (+5 - 6)\right]\right\}$

4 $\left[(-7)^2 \cdot (-5)^2\right] : (7 \cdot 5) - (-12)^2 : (-4)^2 + \left[3^4 \cdot 3^3 : 3^6 + 150 : (-5)^2\right]$

5 $(-22)^5 : (-11)^5 + 3 \cdot (-2)^3 + (-2)^9 \cdot (-3)^9 : \left[(6)^2\right]^4 - \left[(-2)^7 : (-2)^6\right] \cdot (-5)^2$

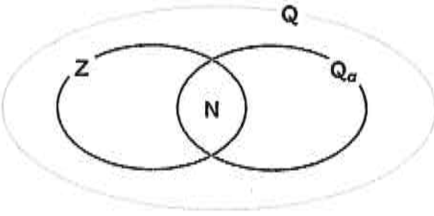
6 $\left\{(-5)^5 : \left[(-5)^8 : (-5)^5 : (-5)^2\right]^3 \cdot (-5)^2\right\}^2 \cdot \left[(+5)^2 : (-5)^2\right]^5 : (-5)^6$

Insieme Q dei numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali è l'insieme che ha come elementi lo zero, le frazioni positive, le frazioni negative.
Q è un insieme infinito, ordinato e denso.

Ricorda

- Le definizioni di carattere generale date per i numeri razionali assoluti valgono anche per i razionali relativi.
- Le operazioni tra numeri razionali relativi si effettuano utilizzando contemporaneamente le modalità considerate per i razionali assoluti e per gli interi relativi, come sarà chiarito negli esempi che seguono.
- Valgono tutte le proprietà studiate per le operazioni negli insiemi N e Z.
- Le quattro operazioni sono interne a Q.
- L'insieme Q dei numeri razionali relativi ha come sottoinsiemi sia l'insieme Z degli interi relativi sia l'insieme Q_a dei razionali assoluti.



ESEMPIO 3

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{26}{15}\right):\left(-2-\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{15}{14}=$$

→ Risolviamo le operazioni nelle parentesi tonde:

$$=\left(\frac{10+9-26}{15}\right):\left(\frac{-8-7}{4}\right)\cdot\frac{15}{14}=$$

→ eseguiamo le somme algebriche a numeratore:

$$=\left(-\frac{7}{15}\right):\left(-\frac{15}{4}\right)\cdot\frac{15}{14}=$$

→ eseguiamo divisioni e moltiplicazioni nell'ordine in cui compaiono, ricordando che nella divisione bisogna moltiplicare la prima frazione per l'inverso della seconda:

$$=\left(-\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{15}^{1}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{4}^{2}}{15}\right)\cdot\frac{\cancel{15}^{1}}{\cancel{14}^{\cancel{2}^{1}}}=$$

→ semplifichiamo e, ricordando le regole sui segni, otteniamo il risultato.

$$=+\frac{2}{15}$$

ESEMPIO 4

$$\left\{\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{4}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}\right]^{2}\right\}^{3}:\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{8}\right]^{2}$$

→ Risolviamo le operazioni nella parentesi quadra, utilizzando le proprietà delle potenze:

$$=\left\{\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{2+4-3}\right]^{2}\right\}^{3}:\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{8}\right]^{2}=$$

$$=\left\{\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}\right]^{2}\right\}^{3}:\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{8}\right]^{2}=$$

→ eseguiamo ora la potenza di una potenza:

$$=\left(-\frac{3}{4}\right)^{18}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{16}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}=+\frac{9}{16}$$

→ utilizziamo ancora le proprietà delle potenze, ottenendo il risultato.

A

Potenza con esponente negativo: una potenza con esponente negativo è equivalente a una potenza con esponente positivo avente come base l'inverso della base.

Ricorda

La base di una potenza con esponente negativo deve essere diversa da zero.

ESEMPIO 5

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = +\frac{25}{9}$ oppure $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = (-3)^{3} = -27$ oppure $5^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4} = \frac{1}{625}$

COMPLETA

7 **Completa la tabella.**

A	B	A + B	A − B	A^{-1}	B^{-1}	$(A \cdot B)^{-1}$	$(A : B)^{-1}$
$-\frac{7}{2}$	$-\frac{2}{7}$						
$0,2\overline{7}$	$-0,\overline{8}$						
1,2	2,4						
−3	$\frac{1}{3}$						

ESERCIZI

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

8 $-\left\{\left(-\frac{14}{11}+\frac{1}{2}-3\right)-\left[-3+\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{2}+2\right)\right]-\frac{1}{2}\right\}+\frac{37}{66}$

9 $\left[-\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{2}+2\right)+\frac{1}{4}+\frac{7}{2}\right]-\left\{-\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)\right]+1-\frac{7}{8}\right\}$

10 $\dfrac{\left(-\frac{1}{7}\right)^{7}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{2}:\left(-\frac{1}{7}\right)^{5}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^{3}:\left(\frac{1}{3}\right)^{3}-1}$

11 $\left[-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{2}:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}\right]^{2}:\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}$

12 $\left[\left(2+\frac{1}{3}\right)^{5}:\left(-1+\frac{4}{7}\right)^{-6}+\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}\right]^{3}+\left(-\frac{1}{11}\right)^{0}$

13 $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{6}-2\right)^{2}\left[\left(-2+\frac{6}{5}\right):\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{15}\right)\right]^{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{20}-\frac{5}{4}\right)^{2}\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{5}-1\right)^{2}\right]$

14 $\left[\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]^{2}+\left[\left(-1+\frac{4}{5}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^{2}\right]^{2}-\left[(-2)^{4}-15\right]^{20}$

15 $\left\{\left[(-3)^5 : (-3)^2 \cdot (-3)^{-6}\right]^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\right\}^{-3} : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (3)^{-1}\right]^2$

16 $2 \cdot \left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^{-7} : \left[(+2)^4 \cdot (-2)^{-2}\right]^6 : \left(-\frac{1}{4}\right)^2\right\}^2 : (-2)^2 : \left(+\frac{1}{4}\right)^{-1}$

17 $\left\{\left[\left(-\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^4\right]^3\right\}^2 : \left\{\left[\left(-1-\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(-1-\frac{1}{4}\right)^5\right]^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3\right\} - \frac{1}{2}$

18 $-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \left\{\frac{1}{6} + \frac{4}{25} + \left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{13}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}^0$

19 $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^2$

20 $\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{10}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{2}{5}\right)^{-2}\right] : \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{6}\right)$

21 $\dfrac{\left(1,\overline{2} - 0,\overline{6}\right)^2}{\left(2 \cdot 2^{-1} - 1,\overline{1}\right)^2} - \dfrac{\left(\frac{5}{3} - 0,\overline{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}$

Per approfondire

1 Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a $1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}}}}$

b $1 + \dfrac{1}{\frac{3}{2} + \dfrac{1}{\frac{3}{2}}} : \left(1 - \dfrac{1}{\frac{3}{2} + \dfrac{1}{\frac{3}{2}}}\right)$

2 Calcola il quadrato della semisomma tra $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{4}{3}$.

VERIFICA

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

1 $\dfrac{(-4)^4 \cdot (-4)^2}{(-4) \cdot (-4)^3} \cdot \dfrac{(-2-2)^3 \cdot (+2-6)^4}{(-6+2)^9}$

2 $\left\{\left[(-6)^4 \cdot (+3)^4\right]^2 : \left[(-18)^2\right]^3\right\}^3 : \left\{\left[(-9)^4\right]^2 : (-3)^4\right\}$

3 $\frac{15}{8} - 2 + \left[\left(-3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)\right] - \left\{-1 - \left[-1 - (-1)\right]\right\}$

4 $\left[(+7)^{-2} \cdot (+7)^{-4} : (-7)^{-7}\right]^{-3} : (-7)^{-5} \cdot (+7)^{-1}$

5 $\left\{\left[(16-12)^2 \cdot (12-8)^{-2} - \frac{1}{2}\right]^3 \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{2}\right\}^{-5} \cdot \left(3 - \frac{3}{7}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

A

6 $\left[(-2)^7:(-2)^{10}+\left(-\frac{5}{2}+1\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-5}\right]:\left[(-2)^{-1}-\left(7-\frac{19}{3}\right)\right]+\left(-\frac{6}{7}\right)^{-2}$

7 $\dfrac{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)^2:\left(-\frac{11}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^2}-\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2-5}{\left(-1+\frac{5}{6}\right)^3}-\dfrac{7}{8}$

8 $\left\{\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\cdot\left(-2-\frac{1}{2}\right)^4\right]^3\right\}^2:\left[\left(-\frac{6}{7}\right)^5\cdot\left(-\frac{3}{4}-1\right)^5\right]^4\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{3}{2}+1\right)$

9 **Scrivi in ordine decrescente le seguenti frazioni.**

a $-\frac{3}{4}$ b $\frac{5}{12}$ c $-\frac{15}{14}$ d $-\frac{21}{63}$

10 **Calcola il quoziente tra i $\frac{3}{14}$ della differenza tra $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{3}$ e i $\frac{2}{7}$ della somma tra -2 e $-\frac{1}{2}$.**

11 **Determina due numeri aventi somma nulla e prodotto uguale a -25.**

12 **Completa in modo che sia verificata la seguente uguaglianza.**

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{\cdots\cdots}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\cdots\cdots}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^5:\left(-\frac{2}{3}\right)^{\cdots\cdots}=-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

VERSO IL TRIENNIO E OLTRE

1 **Dopo averli scritti in notazione scientifica, determina l'ordine di grandezza dei numeri assegnati.**

a $8{,}56$ b $0{,}0326$ c $9{,}46\cdot10^5$ d $0{,}0073$ e 6300 f $4200\cdot10^{-7}$

2 **Trasforma in notazione decimale i seguenti numeri.**

a $7\cdot10^{-5}$ b $1{,}7\cdot10^6$ c $4{,}5\cdot10^{-3}$ d $0{,}5\cdot10^8$

3 **Calcola il valore delle seguenti espressioni.**

a $a-2b$ per $a=-\frac{1}{2}$ e $b=-\frac{1}{3}$ b $\frac{a+b}{2a}$ per $a=-0{,}1$ e $b=0{,}\overline{3}$

c $\dfrac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\left(a+\frac{2}{b}\right)$ per $a=\frac{3}{4}$ e $b=-\frac{4}{3}$

4 **Calcola con opportune strategie il valore della seguente espressione.**

$$\frac{(-144)^4(-4)^{20}}{(12)^6\cdot(3)^{-8}}$$

5 **Se x e y sono due numeri razionali non nulli, stabilisci quali delle seguenti uguaglianze è vera.**

a $\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\right)^{-1}=\frac{1}{xy}$ b $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1}=x+y$ c $\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\right)^{-1}=xy$ d $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{y}\right)^{-1}=\frac{y}{x}$

MONOMI

Un **monomio** è il prodotto tra una parte numerica (coefficiente) e una parte letterale con esponente intero positivo o nullo.

ESEMPIO 1

- $5a^3$ $\quad -\frac{9}{4}a^3x^5$
- $-0,2xwt^2$ $\quad 6x^n$ con $n \in \mathbb{N}$

CONTROESEMPIO 1

- $3b^{-2}$ $\quad \frac{x^7}{y}$
- $\frac{1}{3abc}$ $\quad a+b$

Un monomio è in **forma canonica** se il coefficiente è unico e le lettere della parte letterale compaiono una sola volta (generalmente in *ordine alfabetico*).

ESEMPIO 2

- $\frac{3}{5}x^4y^2$

CONTROESEMPIO 2

- $\frac{1}{2}x^2xy^2\frac{3}{5}xyy$

Ricorda

Poiché il monomio è un *prodotto* si ha:

- $-1c^3d^1 = -c^3d$ infatti $1 \cdot c^3d^1 = c^3d^1$ e $d^1 = d$
- $1x^1y^4z^1 = xy^4z$ infatti $1 \cdot x^1 = x^1 = x$ e $z^1 = z$
- $a^2b^0c^1 = a^2c$ infatti $b^0 = 1$
- $-\frac{2}{7}x^0y^0t^0 = -\frac{2}{7}$ infatti $x^0 = y^0 = t^0 = 1$
- $0x^4 = 0$ infatti $0 \cdot x^4 = 0$ ed è chiamato **monomio nullo**.

- **Grado (complessivo) di un monomio:** somma dei gradi delle singole lettere.
- **Grado di un monomio rispetto a una lettera:** grado con cui compare la lettera quando il monomio è in forma normale.

ESEMPIO 3

- $3x^2yz^5$ è un monomio di grado complessivo 8, di grado 2 rispetto alla x, di grado 1 rispetto alla y e di grado 5 rispetto alla z.
- $-\frac{5}{6}a$ è un monomio di grado complessivo 1 e di grado 1 rispetto alla lettera a.
- $-\frac{3}{8}$ è un monomio di grado complessivo 0 e di grado 0 rispetto a ogni lettera.

A COMPLETA

1 **Completa la seguente tabella.**

	Monomio?	Coefficiente	Parte letterale	Grado complessivo	Grado rispetto alle lettere
$\frac{6}{11}a^2bc$	....	....	a^2bc	....	 1
$-\frac{5}{2}x^{-2}b$	No				
$\frac{6}{5}a^2bc\frac{10}{9}abcaba$	....	....	....	10	....
3	Sì	....	....	....	/
$4a^3b+a^3$	....	....	....	....	....
$\frac{1}{8}\frac{x^5}{ab^3}$	....	....	....	....	....

ESERCIZI

2 **Riduci in forma normale i seguenti monomi.**

a $5a^4b3ab^2c$ b $-\frac{2}{3}x^3y^2\frac{yz^4}{4}$ c $\frac{14}{15}ab^3\frac{3}{7}a^2bac$ d $\frac{2}{21}xt^4w^3\frac{3}{8}x^2t^3tw^2$

3 **Completa la seguente tabella.**

	Monomio?	Coefficiente	Parte letterale	Grado complessivo	Grado rispetto alle lettere
$\frac{7}{6}ab^2y$	....	....	....	....	....
$\frac{3}{4}a^3b^{-2}$	....	....	....	....	....
-8	....	....	....	....	....
a^2+a^6	....	....	....	....	....
a^2bc^{-1}	....	....	....	....	....
$\frac{3}{7}\frac{x^4}{w^3t^4}$	....	....	....	....	....

Monomi simili: monomi che hanno la stessa parte letterale.

ESEMPIO 4

- $\frac{1}{5}ab^2$, ab^2, $-\frac{3}{4}ab^2$, $-1,\overline{2}ab^2$ sono simili, infatti hanno tutti come parte letterale ab^2.
- ab, ab^2, ab^3 non sono monomi simili, infatti hanno parti letterali diverse.

Monomi uguali: monomi che hanno lo stesso coefficiente e la stessa parte letterale.

ESEMPIO 5

- $\frac{2}{5}x^3y^2$ e $\frac{1}{10}xy4x^2y$
- $0,1\overline{3}a^2b^2a$ e $\frac{2}{15}a^3b^2$

Monomi opposti: monomi che hanno coefficiente opposto e stessa parte letterale.

ESEMPIO 6

- $-\frac{2}{7}a^3b^2c$ e $\frac{2}{7}a^3b^2c$

Operazioni con i monomi

Ricorda

Per eseguire correttamente le operazioni con i monomi è necessario aver ripassato le *proprietà delle potenze.*

Somma algebrica di monomi

In generale, la somma algebrica di due o più monomi non è un monomio.

Somma algebrica di monomi simili

La somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile agli addendi e con coefficiente dato dalla somma algebrica dei coefficienti.

ESEMPIO 7

$-2x^3y + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}x^3y - 2x + \frac{x^3y}{6} - \frac{x}{2} =$ → Selezioniamo i monomi simili:

$= -2x^3y + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}x^3y - 2x + \frac{x^3y}{6} - \frac{x}{2} =$ → sommiamo i monomi simili con le due parti letterali x^3y e x mettendo in parentesi i coefficienti:

$= \left(-2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3y + \left(\frac{4}{3} - 2 - \frac{1}{2}\right)x =$ → facciamo il denominatore comune all'interno delle due parentesi:

$= \frac{-12 + 16 + 1}{6}x^3y + \frac{8 - 12 - 3}{6}x =$ → eseguiamo le somme al numeratore:

$= \frac{5}{6}x^3y - \frac{7}{6}x$ → arriviamo al risultato finale.

COMPLETA

Esegui le seguenti somme di monomi.

4 $-2a^2 + 4ab - 7ab + 3a^2 - b^2 + 5ab - 9b^2 =$

$= (-2 + \ldots\ldots)a^2 + (4 - \ldots\ldots)ab + (-1 - \ldots\ldots)\ \ldots\ldots = a^2 + \ldots\ldots\ ab - \ldots\ldots$

5 $\frac{5}{6}as - \frac{5}{8}as - \left[\left(\frac{1}{7}at - \frac{1}{3}at\right) - \left(\frac{1}{4}as - \frac{1}{8}as\right)\right] = \frac{\ldots\ldots}{24}as - \left[\left(\frac{\ldots\ldots}{21}at\right) - \left(\frac{\ldots\ldots}{8}as\right)\right] =$

$= \frac{\ldots\ldots}{24}as\ \ldots\ldots\ \frac{\ldots\ldots}{21}at\ \ldots\ldots\ \frac{\ldots\ldots}{8}as = \frac{\ldots\ldots}{3}as + \frac{\ldots\ldots}{21}at$

ESERCIZI

Esegui le seguenti somme di monomi.

6 $\frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}y + 2 + \frac{5}{2}y + \frac{2}{3}x^2 - 6$

7 $\frac{1}{8}ac - \frac{2}{3}bc - \frac{8}{9} - \frac{2}{3}ab - \frac{3}{2}bc + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}ab + \frac{1}{2}ac$

8 $\left(\frac{1}{2}ax - \frac{3}{8}ax\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}bx + \frac{1}{4}bx\right) - \left[\left(\frac{3}{2}bx - bx\right) + \frac{3}{2}\left(ax - \frac{5}{4}ax\right)\right]$

9 $\frac{1}{4}x^2y^2 - \frac{3}{2}xy^2 - \left[\frac{1}{3}\cdot\left(2x^2y^2 + \frac{1}{4}x^2y^2\right) - \frac{2}{3}x^2y^2\right] - \frac{1}{6}xy^2$

Prodotto di monomi

Il prodotto di monomi è un monomio che ha come coefficiente il prodotto tra i coefficienti e come parte letterale il prodotto tra le parti letterali.

ESEMPIO 8

$\left(-\frac{2}{15}xy^2\right)\cdot 3ab^2\cdot\left(-5ab^3x^2\right) =$

Scriviamo il prodotto dei vari coefficienti moltiplicato per il prodotto delle parti letterali, applicando le proprietà delle potenze:

$= \left(-\frac{2}{\cancel{15}\,\cancel{5}_1}\right)\cdot\cancel{3}^1\cdot\left(-\cancel{5}^1\right)a^{1+1}b^{2+3}x^{1+2}y^2 =$

semplifichiamo ed eseguiamo la moltiplicazione tra i coefficienti; sommiamo quindi gli esponenti arrivando al risultato.

$= +2a^2b^5x^3y^2$

Attenzione!

Da qui in avanti supporremo che tutti gli esponenti letterali che compaiono siano numeri naturali.

COMPLETA

Esegui i seguenti prodotti di monomi.

10 $5xz\cdot\frac{7}{6}ab^2y\cdot\left(-\frac{3}{10}xz^2\right) = 5\cdot\frac{7}{6}\cdot(\ldots\ldots)ab^2x^{\ldots\ldots}yz^{\ldots\ldots}$

11 $\left(\frac{5}{2}ab - ab\right)\cdot\left(-\frac{2}{9}xz\right)\cdot\left(\frac{7}{6}ab^2 - \frac{2}{3}ab^2\right)\cdot y = (\ldots\ldots)ab\cdot\left(-\frac{2}{9}xz\right)\cdot(\ldots\ldots)\ \ldots\ldots\cdot y =$

$= \ldots\ldots\ ab\cdot\left(-\frac{2}{9}xz\right)\cdot\ldots\ldots\cdot y = \ldots\ldots\ a^{\ldots\ldots}b\ \ldots\ldots = \ldots\ldots$

Esegui i seguenti prodotti di monomi.

12 $\frac{2}{3}ab^4 \cdot \left(-\frac{9}{8}abc\right) \cdot \frac{5}{12}ax$

13 $\left(\frac{1}{3}xy\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y\right) \cdot \left(\frac{9}{8}x^3y^2\right) \cdot \left(-4x^2y\right)$

14 $\left(0,\bar{3}s^2t\right) \cdot \left(-\frac{9}{5}st^3\right) \cdot \left(\frac{1}{1,2}s^3t^3\right)$

15 $\frac{8}{3}a\left(-\frac{3}{4}b + b\right) + \frac{5}{11}b\left(\frac{6}{5}a - \frac{5}{6}a\right)$

16 $\frac{1}{3}ab\left(-\frac{1}{3}ab^2 + ab^2 - \frac{2}{3}ab^2\right) \cdot \left(\frac{1}{8}a^3b^2 - \frac{1}{4}a^3b^2\right)$

Potenza di monomi

La potenza di un monomio si esegue elevando sia il coefficiente sia la parte letterale all'esponente dato.

ESEMPIO 9

$\left(-\frac{3}{2}a^2b^3\right)^4 =$

→ Eleviamo alla quarta sia il coefficiente sia la parte letterale:

$= \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \left(a^2b^3\right)^4 =$

→ applichiamo la proprietà $\left(a^pb^q\right)^n = \left(a^p\right)^n\left(b^q\right)^n$ alla parte letterale:

$= +\frac{81}{8}\left(a^2\right)^4\left(b^3\right)^4 =$

→ eseguiamo i prodotti tra gli esponenti applicando la proprietà $\left(a^p\right)^n = a^{pn}$ e arrivando al risultato.

$= +\frac{81}{8}a^8b^{12}$

Attenzione!

$\left\{-\left[-\left(\frac{1}{3}ab\right)^3\right]^2\right\}^3 =$

In questo caso non possiamo applicare la proprietà $\left(a^p\right)^n = a^{pn}$ alle potenze poiché c'è un segno "–" (meno) davanti alla parentesi; è necessario calcolare le potenze una alla volta partendo dalla più interna.

$= \left\{-\left[-\frac{1}{27}a^3b^3\right]^2\right\}^3 =$

→ Calcoliamo la seconda potenza facendo attenzione ai segni:

$= \left\{-\frac{1}{27^2}a^6b^6\right\}^3 =$

→ calcoliamo l'ultima potenza arrivando al risultato.

$= -\frac{1}{27^6}a^{18}b^{18}$

A COMPLETA

17 **Completa la seguente tabella.**

A	B	A^2	B^3	$3A^2B^3$
2ab	b^2	....	....	....
a^3z	....	....	$-8b^6z^3$	....
$-\frac{1}{3}a^2b$	$-0,\overline{2}ab^2c$	....	....	....

ESERCIZI

Calcola le seguenti potenze.

18 $\left(2a^2x\right)^5$

19 $\left(-1,\overline{3}s^2t^4\right)^5$

20 $\left[\left(-\frac{1}{2}axy^2\right)^2\right]^3$

21 $\left\{\left[\left(-\frac{5}{6}ab^3\right)^5\right]^0\right\}^3$

22 $\left(\frac{1}{2}ax^3t\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}ab\right)^2\cdot\left(\frac{9}{5}a^2\right)^2$

23 $\left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}x^3y^6\right)^2\right]^2\right\}^3$

24 **Trasforma, se possibile, i seguenti monomi in quadrati di monomi.**

a $\frac{16}{9}x^6y^4z^8$ b $64p^6s^9$

c $0,16x^6y^{14}$ d $0,01a^{2n}b^{2n-8}$

25 **Trasforma, se possibile, i seguenti monomi in cubi di monomi.**

a $\frac{8}{27}a^3b^9c^{12}$ b $\frac{1}{6}p^6q^9t^{12}$

c $-\frac{1}{8}a^{15}x^{12}$ d $64x^{3n-6}t^{9n-12}$

Divisione di monomi

La divisione tra due monomi, quando è possibile, è un monomio che ha come coefficiente il quoziente tra i coefficienti e come parte letterale il quoziente tra le parti letterali.

ESEMPIO 10

$6a^2b^4 : 3b^2 =$

Scriviamo la divisione tra i coefficienti e dividiamo lettera per lettera sottraendo gli esponenti:

Attenzione!

Nel divisore non compare la lettera a ma si può sempre pensare come $1 = a^0$.

$= (6:3)a^{2-0}b^{4-2} =$

eseguiamo la semplificazione tra i coefficienti e la sottrazione tra gli esponenti arrivando al risultato.

$= 2a^2b^2$

CONTROESEMPIO 10

$$-\frac{6}{7}a^4b^6 : \frac{18}{21}a^3b^7 =$$

Scriviamo la divisione tra i coefficienti e dividiamo lettera per lettera sottraendo gli esponenti:

$$= \left(-\frac{6}{7} : \frac{18}{21}\right)a^{4-3}b^{6-7} =$$

eseguiamo la divisione tra i coefficienti e la sottrazione tra gli esponenti;

$$= \left(-\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{18}_{3}}\right)ab^{-1} = -ab^{-1}$$

semplifichiamo e otteniamo il risultato.

Attenzione!

Il risultato **non** è un monomio poiché compare un esponente negativo.
In casi come questo si dice che la divisione è **impossibile**.

COMPLETA

26 **Completa la seguente tabella lasciando vuote le caselle nelle quali le operazioni indicate non danno luogo a monomi.**

A	B	C	A · B · C	A · B² : C	A² : (B · C)
$6ab^2$	$-2a$	$3ab$	....	....	....
$-\frac{2}{3}a^4b^2$	$6b$	$-\frac{a^4b^3}{3}$	....	....	....
$7ab$	$\frac{2}{7}bz$	$-\frac{b^2z^2}{7}$	....	....	....

ESERCIZI

Esegui, se possibile, le seguenti divisioni.

27 $\frac{4}{15}x^3y^4z^6 : \left(-\frac{2}{3}xyz^6\right)$

28 $-\frac{2}{3}a^3b^3 : \left(-\frac{3}{2}a^3b^3\right)$

29 $-\frac{12}{25}a^4x^3 : \left(-\frac{3}{5}a^3x^4\right)$

30 $-\frac{27}{8}x^4y^5 : \left(-\frac{3}{4}x^3y^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)$

31 $-12p^{5t}q^{3k} : \left(-3p^{2t}q^{3k}\right)$

Ricorda

$a + a = 2a$	$a \cdot a = a^2$	$a : a = 1$
$a : 0 =$ impossibile	$0 : 0 =$ indeterminato	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$
$a^0 = 1$	$0^0 =$ indeterminato	$a^k \cdot a^h = a^{k+h}$
$\left(a^k\right)^q = a^{kq}$	$a^p : a^q = a^{p-q}$	

Per approfondire

Determina i valori di h, k, r, s, q e w in modo che le seguenti coppie di monomi risultino uguali.

a $\left(\frac{3}{5}x^{k+3}\right)^2\left(\frac{7}{8}y^2\right)^h$ e $\frac{21}{40}x^8y^6$ **b** $\left(\frac{2}{3}a^sb^w\right)\left(\frac{5}{r}a^sb^3\right) : \left(\frac{10}{q}a^2b\right)$ e $\frac{1}{2}a^4b^5$

A

Espressioni con i monomi

Ricorda

Nella semplificazione di un'espressione con i monomi, come hai già potuto imparare con il calcolo numerico, bisogna rispettare le priorità di esecuzione delle operazioni già viste in N.

ESEMPIO 11

$$-\left[-6a^3y\left(\frac{5}{2}a^2x^3-a^2x^3\right)^3\cdot\frac{ay^4}{9}\right]^3:\left[-\frac{a^2}{2}\left(2xy-\frac{4}{3}xy\right)\right]^2=$$

Sommiamo i termini simili all'interno delle parentesi:

$$=-\left[-6a^3y\left(\frac{3}{2}a^2x^3\right)^3\cdot\frac{ay^4}{9}\right]^3:\left[-\frac{a^2}{2}\left(\frac{2}{3}xy\right)\right]^2=$$

eseguiamo la potenza più interna e il prodotto nella seconda parentesi:

$$=-\left[-6a^3y\left(\frac{27}{8}a^6x^9\right)\cdot\frac{ay^4}{9}\right]^3:\left[-\frac{a^2xy}{3}\right]^2=$$

eseguiamo il prodotto nella prima parentesi e la potenza nella seconda:

$$=-\left[-\frac{9}{4}a^{10}x^9y^5\right]^3:\left[+\frac{a^4x^2y^2}{9}\right]=$$

ora eseguiamo l'ultima potenza:

$$=-\left[-\frac{9^3}{64}a^{30}x^{27}y^{15}\right]:\left[+\frac{a^4x^2y^2}{9}\right]=$$

infine eseguiamo la divisione cambiando il segno e otteniamo il risultato.

$$=-\left[-\frac{9^4}{64}a^{26}x^{25}y^{13}\right]=\frac{9^4}{64}a^{26}x^{25}y^{13}$$

COMPLETA

Completa.

32 $\left[\left(\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{4}a^2b\right)^4:\left(\frac{1}{4}a^2b\right)^3\right]^2:\left[\left(a^2b-\frac{1}{3}a^2b\right)^5:\left(\frac{2}{3}a^2b\right)^4\cdot\frac{2}{3}a^2b\right]=$

$=\left[\left(\frac{\dots\dots}{4}a^2b\right)^4:\left(\frac{1}{4}a^2b\right)^3\right]^2:\left[\left(\frac{\dots\dots}{3}a^2b\right)^5:\left(\frac{2}{3}a^2b\right)^4\cdot\frac{2}{3}a^2b\right]=$

$=\left[\left(\dots\dots\ a^2b\right)^{4-3}\right]^2:\left[\left(\dots\dots\ a^2b\right)^{5-\dots\dots+\dots\dots}\right]=\left(\dots\dots\ a^2b\right)^{\dots\dots}:\left(\dots\dots\ a^2b\right)^{\dots\dots}=\dots\dots\ a^{\dots\dots}b^{\dots\dots}$

ESERCIZI

Semplifica le seguenti espressioni.

33 $\left[(-3ab)^2\left(-\frac{a^2c}{3}\right)^3(8abc)\right]^2:\left(-3a^6b^2c^2\right)^3$

34 $\left(-\frac{2}{7}a^2x\right)^2:\left(\frac{1}{7}ax\right)^2-\left[-9a^4x^3:(-x)^2\right]:3a^2x$

35 $\frac{5}{2}(3st)^3\left(-\frac{st^3}{3}\right)^2-\left[2s^2\left(\frac{3}{2}st^3\right)^3-\frac{1}{4}\left(st^2\right)^5:t\right]-s^5t^9$

Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi

M.C.D.: il massimo comune divisore tra due o più monomi è il massimo comune divisore tra i coefficienti moltiplicato per le lettere comuni con l'esponente più piccolo.

m.c.m.: il minimo comune multiplo tra due o più monomi è il minimo comune multiplo tra i coefficienti moltiplicato per tutte le lettere con l'esponente più grande.

Ricorda

- Se nei coefficienti dei monomi compaiono segni diversi, sia il M.C.D. sia il m.c.m. vanno considerati con segno "+" (**più**).
- Se nei coefficienti dei monomi compaiono frazioni, sia il M.C.D. sia il m.c.m. vanno considerati con coefficiente "1" (**uno**).

ESEMPIO 12

A	B	C	M.C.D.	m.c.m.
$12a^3xy^2$	$-6ax$	$4a^2xy$	$2ax$	$12a^3xy^2$
$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{4}a^2$	$-\frac{5}{8}a^5$	a	a^5

ESERCIZI

36 Calcola il M.C.D. e il m.c.m. tra i seguenti monomi.

a) $4x^3y^5;\ -6x^2y^3z^2;\ 3y^3z^4$ b) $-\frac{4}{5}a^2b^3;\ \frac{b^2}{25};\ 5a^3b^2$ c) $-xy^2z^5;\ 7x^3y^2z^2;\ -2y^4z^3$

37 Trova un monomio per il quale il M.C.D. con $6a^2b^5c^3$ sia $3b^3c^3$.

38 Trova un monomio per il quale il m.c.m. con $5x^2y^4$ sia $35x^2y^4z^5$.

VERIFICA

1 Completa le seguenti operazioni identificando il monomio mancante.

a) $\left(3ax^2\right)+(......)=-\frac{2}{3}ax^2$ b) $\left(3x^2y\right)\cdot(......)=x^2y^3$

c) $\left(-\frac{a^3b^2}{2}\right):(......)=4a^2$ d) $\frac{3}{2}x^4y^5-x^2y^3(......)=-\frac{x^4y^5}{2}$

e) $4b^6z^2+(......)^3:2z=0$

2 Trasforma, se possibile, i seguenti monomi in quadrati di monomi.

a) $\frac{16}{25}a^4b^{12}c^8$ b) $-64b^2z^4$ c) $0{,}81x^2y^6$ d) $0{,}01x^{32}y^{16}z^8$

3 Trasforma, se possibile, i seguenti monomi in cubi di monomi.

a) $\frac{27}{64}x^3z^{12}$ b) $0{,}125a^6b^9c^{12}$ c) $-8y^{15}c^3$ d) $0{,}512x^{36}y^{18}z^9$

A

Semplifica le seguenti espressioni.

4 $\left(-\frac{1}{3}a^2b - 2a^2b\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\right)b - \frac{7}{2}\left(-3a^2b + \frac{5}{7}a^2b\right) + \frac{1}{3}b$

5 $\left[\frac{5}{3}a^3y + \left(a^2y - \frac{1}{3}a^2y\right)^3 : \left(-0,\overline{4}a^3y^2\right)\right]^2 : \left(\frac{ay}{2} - ay\right)^2$

6 $\left[\left(5x^2y\right)^2 : 3xy\right] : \left[\frac{1}{5}xy^3\left(10x^2y\right)^2 - \left(3x^2y^2\right)^3 : 9xy\right]$

7 $\left(-\frac{5}{2}pt^2\right)^5 : \left(-\frac{5}{2}pt^2\right)^4 + \left(\frac{1}{2}pt\right)^3 : \left(-2p^2t\right) - \left(-3p^6t^7\right) : \left(-2p^5t^5\right)$

8 $\left\{\left(\frac{2}{3}x^3y^2\right)^3 : \left[\frac{4}{3}x\left(-xy\right)^3\right]^2\right\}^3 : \frac{2}{3}\left[x\left(\frac{xy^3}{3}\right)^2 - 12\left(-\frac{xy^2}{3}\right)^3\right]$

9 **Trova il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti monomi.**

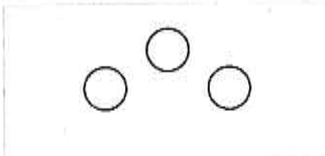
a $\frac{6}{5}p^4q^4t^2;\ \frac{1}{10}pq^2r;\ -\frac{1}{2}qr^3t$ b $24a^5b^4c^6;\ -3a^3x^2y^4;\ -6b^3x$ c $\frac{2}{9}x^2y^6;\ -\frac{3}{8}x^2y^4t;\ -\frac{1}{5}xt^2$

10 **Trova un monomio per il quale il M.C.D. con $6x^2y^4z^2$ e $10xy^2z^3$ sia $2xy^2$.**

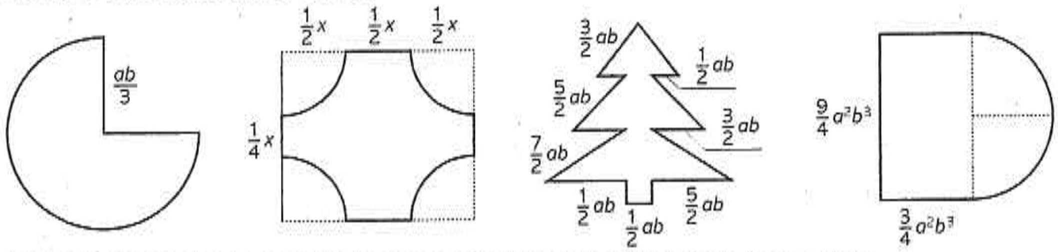
11 **Trova un monomio per il quale il m.c.m con $3a^2bc^3$ e $6a^2b^3c^2$ sia $12a^3b^3c^4$.**

Verso il triennio e oltre

1 In una piazza rettangolare ci sono tre fontane circolari, come mostrato in figura. Sapendo che le dimensioni della piazza sono $30u$ e $70u$, mentre il raggio delle fontane è $5u$, determina il monomio che rappresenta la superficie calpestabile della piazza.



2 Calcola il perimetro delle figure.



3 Per quali valori dei parametri le espressioni rappresentano un monomio?

a $-\frac{1}{3}a^{n-1}b^{p-3}$ b $\frac{5}{2}x^{\frac{k}{3}}y^{t+5}$ c $\frac{8}{9}a^{n-1}b^{p-3} - \frac{1}{3}a^3b^5$ d $\frac{1}{3}x^ty^{2-k} : \frac{1}{6}xy^2$

4 Semplifica le seguenti espressioni in cui compaiono esponenti negativi, poi rispondi alla domanda.

a $-\frac{1}{2}x^2y^3z \cdot \left(-\frac{6}{5}x^{-1}y^{-2}\right) + \frac{1}{15}xyz - \frac{1}{10}x^4y : \frac{3}{5}x^3z^{-1}$

b $\left\{\left[-\left(\frac{1}{6}ax^2\right)^{-2}\right]^2 : \left[\left(\frac{2}{3}a^{-2}x\right)^3\right]^{-1}\right\}^{-3}$

c $\left[\left(\frac{2}{3}x^{1-t}y^{2-3k}\right)^{-3}\right]^{-1} : \left[\left(-\frac{1}{6}x^{2-2t}y^{2+k}\right)^{-2}\right]^3$ con $t, k \in \mathbb{Z}$

Sono espressioni tra monomi? ....

POLINOMI

A
ALGEBRA

Un **polinomio** è la somma algebrica di due o più monomi (**termini**).

ESEMPIO 1

$a - b$ $\quad 6a^2xy^3 - 3a^3xy \quad \frac{4}{5}x^4 - \frac{1}{2}y^3 \quad -0,\overline{3}b^2 + 2,\overline{3}c^2$

$\frac{2xy - 3y^2}{7}$ $\quad 6a^n + 5b^t$ con $n, t \in \mathbb{N}$ sono polinomi.

CONTROESEMPIO 1

$-\frac{2}{3}ab^3 + x^{-2} - z \quad \frac{x^2 + 2ab}{y} \quad \frac{1}{3a^2 + b}$ non sono polinomi.

Un polinomio è in **forma normale** se non vi compaiono monomi simili.

ESEMPIO 2

$3a^3 + 2b - 5c^2 \quad \frac{3}{5}x^4 + \frac{1}{3}ay^2 \quad 7a^n + 5 + 5b^{s+1}$ con $n, s \in \mathbb{N}$
sono polinomi in forma normale.

CONTROESEMPIO 2

$3a + b^2 + c^2 - a \quad \frac{1}{2}x^2y + y^2 - \frac{3}{5}x^2y \quad \frac{5}{7}a^2 - x^n - y^2 + \frac{3}{5}x^n$ con $n \in \mathbb{N}$
sono polinomi non in forma normale.

Un **binomio** è un polinomio costituito da due termini: $\frac{3}{5}x^4 + \frac{1}{3}ay^2$.

Un **trinomio** è un polinomio costituito da tre termini: $ab + x^3 + \frac{1}{3}ay^2$.

Un **quadrinomio** è un polinomio costituito da quattro termini: $\frac{1}{4}a + 0,\overline{3}b + x^2 + \frac{1}{3}y^3$.

Polinomi uguali: polinomi costituiti dagli stessi monomi.

Grado (complessivo) di un polinomio: massimo grado dei singoli monomi.

Grado di un polinomio rispetto a una lettera: massimo grado con cui compare la lettera.

Polinomio omogeneo: tutti i termini hanno lo stesso grado.

Polinomio ordinato rispetto a una lettera: se le potenze di quella lettera compaiono in ordine crescente o decrescente.

Polinomio completo rispetto a una lettera: se contiene le potenze di quella lettera dal massimo a zero.

Termine noto: monomio del polinomio, se esiste, di grado zero.

ESEMPIO 3

- $-\frac{5}{6}a^3 - 2a^2b^2 + 2a + 1$: è un polinomio di grado complessivo 4 non omogeneo, di grado 3 ordinato e completo rispetto alla a, di grado 2 non completo e non ordinato rispetto alla b, 1 è il termine noto.
- $3x^3 - 2x^2y + y^3$: è un polinomio di grado complessivo 3 omogeneo, di grado 3 ordinato e completo rispetto alla x, di grado 3 non completo ma ordinato rispetto alla y, il termine noto è 0 (zero).
- $-\frac{2}{5}$ è un polinomio di grado complessivo 0.

COMPLETA

1 **Completa la seguente tabella.**

Polinomio	Grado complessivo	Grado rispetto alle lettere		Omogeneo	Ordinato rispetto alle lettere		Completo rispetto alle lettere	
…………	4	3	1	No	Sì	No	No	Sì
$4a^3b + a^2 - 0,\bar{4}a + 1$	…………	……	……	…………	……	……	……	……
$\frac{1}{5}a^2y + y^3 - 2ay^2 - 1$	…………	……	……	…………	……	……	……	……
…………	3	3	3	Sì	Sì	Sì	Sì	Sì

ESERCIZI

2 **Di ognuno dei seguenti polinomi individua il grado complessivo, il grado rispetto alle lettere, se è omogeneo, completo e ordinato rispetto alle lettere che vi compaiono.**

a) $\frac{4}{5}a^5b - 3a^4b^2 + \frac{2}{3}a^3$

b) $5a^4 - \frac{3}{8}a^5b + a^6b^2 + \frac{1}{5}a^3b^3 - \frac{2}{3}b^4$

c) $4t^4 + 6t^3w + 5t^2w^2 - tw^3 + w^4$

3 **Ordina i seguenti polinomi secondo le potenze decrescenti delle lettere che vi compaiono.**

a) $5a^4 - \frac{3}{7}a^5 - a^6 + \frac{1}{4}a^3 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4}x - 3x^2y - x^3 + \frac{1}{3}y^3 + y^2$

4 **Scrivi un polinomio in x di grado 5 ordinato ma non completo.**

5 **Scrivi un polinomio in t di grado 3 completo ma non ordinato.**

6 **Scrivi un polinomio in p di grado 4 completo e ordinato.**

7 **Scrivi un polinomio in a e b di grado complessivo 3 non omogeneo, di grado 2 ordinato ma non completo rispetto ad a, di grado 2 completo ma non ordinato rispetto a b.**

Operazioni con i polinomi

Ricorda

Per eseguire correttamente le operazioni con i polinomi è necessario conoscere bene le operazioni con i monomi.

Somma algebrica di polinomi

La somma algebrica di due o più polinomi è un polinomio ottenuto dai polinomi addendi, *eventualmente cambiati di segno*, dopo aver ridotto i termini simili.

ESEMPIO 4

$(4a-3b)-(2a-5b)+(6a-4b)=$ → Togliamo le parentesi:

Attenzione!
Se davanti alla parentesi c'è il segno – (meno) dobbiamo cambiare i segni a tutti i termini nella seconda parentesi.

$=4a-3b-2a+5b+6a-4b=$ → riduciamo i termini simili:

$=(4-2+6)\,a+(-3+5-4)\,b=$ → eseguiamo le somme e otteniamo il risultato finale.

$=8a-2b$

$\frac{1}{4}x^2-\left[\frac{1}{2}x^2-\left(a+\frac{2}{3}\right)\right]-\left(\frac{1}{5}x^2+a\right)+\frac{1}{2}=$ → Togliamo le parentesi più interne:

Attenzione!
Cambiare opportunamente i segni.

$=\frac{1}{4}x^2-\left[\frac{1}{2}x^2-a-\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{5}x^2-a+\frac{1}{2}=$ → togliamo la parentesi quadra:

Attenzione!
Cambiare opportunamente i segni.

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\cancel{+a}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}x^2\cancel{-a}+\frac{1}{2}=$ → riduciamo i termini simili:

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)x^2+\frac{4+3}{6}=$ → eseguiamo le somme tra i coefficienti e otteniamo il risultato finale.

$=-\frac{9}{20}x^2+\frac{7}{6}$

ESERCIZI

Esegui le seguenti somme di polinomi.

8 $(3a^2-5b^2+2ab)-(3ab+a^2+b^2)-(4b^2-2a^2-ab)$

9 $2a^3-\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2+1\right)-\left(a^3-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}\right)-\left(a^3-\frac{1}{6}a^2\right)$

10 $-\left\{-\left[\frac{3}{2}t-\left(4s-\frac{1}{6}\right)\right]+3t-\frac{4}{3}s\right\}+\frac{8}{3}s$

11 $2-\left\{-\left[-\left(\frac{1}{2}ab-\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{3}b^3\right)-\left(ab-\frac{2}{3}b^3\right)\right]-\left(-\frac{1}{3}a^2-2\right)\right\}$

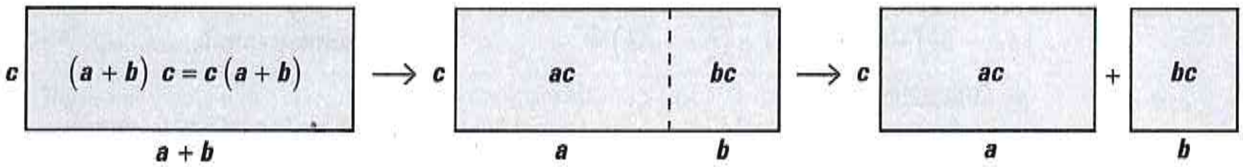
Prodotto di un polinomio per un monomio

Il prodotto di un polinomio per un monomio si esegue applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$, cioè moltiplicando ogni termine del polinomio per il monomio.

Prodotto di un monomio per un polinomio

In modo del tutto analogo, il prodotto di un monomio per un polinomio si esegue moltiplicando il monomio per ogni termine del polinomio.

Geometricamente, si può interpretare questa operazione come calcolo dell'area di rettangoli.



ESEMPIO 5

$3a\left(a^2-ab\right)=$ — Scriviamo il prodotto del monomio per tutti i termini del polinomio:

$=3a\cdot a^2+3a\left(-ab\right)=$ — eseguiamo il prodotto dei monomi come abbiamo imparato a fare e otteniamo il risultato.

$=3a^{2+1}-3a^{1+1}b=3a^3-3a^2b$

COMPLETA

Esegui i seguenti prodotti di polinomio per monomio.

12 $\frac{3}{2}ab\cdot\left(-\frac{2}{9}xz+\frac{7}{6}ab^2-\frac{2}{3}a^3b^2\right)=\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{9}\right)abxz+\ldots\ldots-\ldots\ldots=\ldots\ldots$

13 $\left(-8bx^2\right)\left[\left(abx^2-\frac{1}{3}a^2b\right)\left(-\frac{1}{4}b^3x^2\right)\right]=\left(-8bx^2\right)\left[\left(abx^2\right)\left(-\frac{1}{4}b^3x^2\right)+\left(-\frac{1}{3}a^2b\right)\left(-\frac{1}{4}b^3x^2\right)\right]=$

$=\left(-8bx^2\right)\left[-\frac{1}{4}\ldots\ldots+\frac{1}{12}\ldots\ldots\right]=+2\ldots\ldots-\frac{2}{3}\ldots\ldots$

ESERCIZI

Esegui i seguenti prodotti.

14 $\frac{6}{5}x^2\left(x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy\right)$

15 $6a^2b\left(\frac{1}{3}a^3b-\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{6}ab\right)\left(-\frac{2}{3}a^2b^2\right)$

16 **Dati i polinomi $A=-2ab^2+4b^3x^2-6ax-5$, $B=3ab^2-5b^3x^2-3ax-2$ e $C=2ab^2+4b^3x^2-5ax-6$, esegui le seguenti operazioni.**

a $A-B$

b $2B-3C$

c $\frac{2}{3}A-\left(B+\frac{4}{3}C\right)$

17 **Dati i polinomi $A=2x^2-y^2+6ab$, $B=4x^2+5y^2-2ab$, $C=x^2-2ab+y^2$ e $D=-x^2-y^2+3ab$, esegui le seguenti operazioni.**

a Sottrai il terzo alla somma dei primi due.

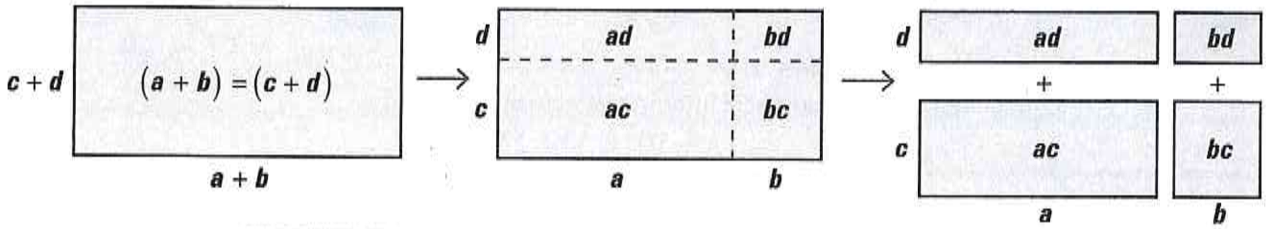
b Somma alla differenza dei primi due, la differenza del terzo con il quarto.

c Sottrai alla metà del quarto, la somma del doppio del terzo con il triplo del secondo.

Prodotto di due o più polinomi

Il prodotto di due o più polinomi si esegue moltiplicando ogni termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo.

Geometricamente, si può interpretare questa operazione come calcolo dell'area di rettangoli.



ESEMPIO 6

$(3a+2b)(a-3b)=$ — Scriviamo il prodotto di ogni termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo polinomio:

$= 3a \cdot a + 3a \cdot (-3b) + 2b \cdot a + 2b \cdot (-3b) =$ — eseguiamo il prodotto dei monomi come abbiamo imparato a fare:

$= 3a^2 - 9ab + 2ab - 6b^2 =$ — sommiamo i termini simili

$= 3a^2 - 7ab - 6b^2$ — e otteniamo il risultato.

$(a+2)(a-3)(a-1)=$ — In questo caso, eseguiamo il prodotto di ogni termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo polinomio:

$= (a^2 - 3a + 2a - 6)(a-1) =$ — sommiamo i termini simili all'interno della prima parentesi:

$= (a^2 - a - 6)(a-1) =$ — eseguiamo ancora il prodotto dei due polinomi rimasti:

$= a^3 - a^2 - a^2 + a - 6a + 6 =$ — sommiamo i termini simili

$= a^3 - 2a^2 - 5a + 6$ — e otteniamo il risultato.

COMPLETA

Completa.

18 $(3a^2 - ax)(ax - 2a^2) = 3a^3x - \ldots\ldots - a^2x^2 + \ldots\ldots = 5a^3x \ldots\ldots$

19 $\left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{3}ab\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}ab\right) = \frac{3}{2}x^2 - \ldots\ldots - \frac{10}{3}abx \ldots\ldots = \frac{3}{2}x^2 \ldots\ldots$

ESERCIZI

Calcola i seguenti prodotti di polinomi.

20 $(a-b)(2a+3b) - 3a(a+b) - (3a-2b)(a+b) + 3ab$

21 $4x^2y - xy\{2xy(1+x) - [3x(3y+1) - 8xy](xy+2)\}$

22 $[(x+2)(x-3) + (x-2)(1-2x)](2x-1)$

23 $2(x^2-2x-1)(x-2) - [-(1-x)(x-2)(x+3) + x(x+1)(x-3)]$

24 $\left(\frac{9}{4}x - y\right)\left[-\left(\frac{1}{2}x - 2y\right)\left(\frac{1}{3}x + 3y\right) + \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right)(y - 2x)\right]$

Prodotti notevoli

I prodotti notevoli sono delle formule che permettono di eseguire più rapidamente i calcoli quando i fattori si presentano in forma particolare.

Quadrato di un binomio

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Questa uguaglianza può essere interpretata nel seguente modo:

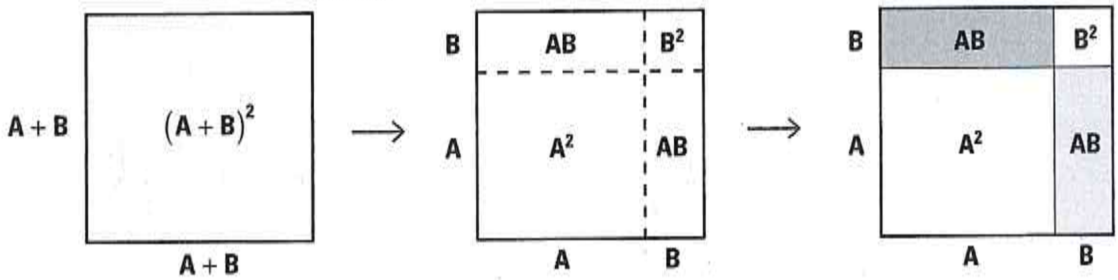
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Area di un quadrato di lato A + B.

Somma dell'area di due quadrati di lato A e di lato B con l'area di due rettangoli di lati A e B.

I due termini sono uguali.

Graficamente otteniamo:



ESEMPIO 7

$(x + y)^2 =$

$= x^2 + 2xy + y^2$

→ Per utilizzare la formula $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ poniamo $A = x$ e $B = y$ ottenendo il risultato.

$\left(\frac{3}{2}ab + \frac{1}{3}b^2\right)^2 =$

$= \frac{9}{4}a^2 + ab^2 + \frac{1}{9}b^4$

→ Poniamo $A = \frac{3}{2}ab$ e $B = \frac{1}{3}b^2$ ottenendo il risultato.

$(x^2y - xy^2)^2 =$

Attenzione!
In questo caso dobbiamo porre $A = x^2y$ e $B = -xy^2$, ottenendo il risultato.

$= x^4y^2 - 2x^3y^3 + x^2y^4$

$(-ax - bx)^2 =$

Attenzione!
In questo caso dobbiamo porre $A = -ax$ e $B = -bx$, ottenendo il risultato.

$= a^2x^2 + 2abx^2 + b^2x^2$

Ricorda

→ $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

→ $(-A - B)^2 = (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

$(A - B)^2 = (-A + B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

COMPLETA

Completa.

25 $\left(3a+\frac{1}{2}b\right)^2=(3a)^2+2(\dots\dots)\left(\frac{1}{2}b\right)+(\dots\dots)^2=9\dots\dots$

26 $\left(-2st+\frac{1}{2}\right)^2=(-2st)^2+2(\dots\dots)\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\dots\dots}=+4s^2t^2-\dots\dots=$

27 $\left(2st-\frac{1}{2}\right)^2=$ puoi scrivere direttamente il risultato osservando l'esercizio precedente; perché?

ESERCIZI

Esegui i seguenti quadrati di binomio.

28 $(2x+1)^2$

29 $(4-2a)^2$

30 $(1-3xy)^2$

31 $(-a-2b)^2$

32 $\left(2-\frac{3}{2}x\right)^2$

33 $\left(-2+\frac{1}{4}a\right)^2$

34 $\left(5a-\frac{1}{2}b\right)^2$

35 $(xy^2-3x^2y)^2$

36 $\left(abc-\frac{y}{2}\right)^2$

37 $(-0,75-0,\overline{2}a)^2$

38 $(a^3b-ab^3)^2$

39 $\left(-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{2}{3}\right)^2$

40 $(-x^n+x)^2$

41 $(a^{2k}+a^k)^2$

Prodotto di una somma per una differenza

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

Questa uguaglianza può essere interpretata nel seguente modo:

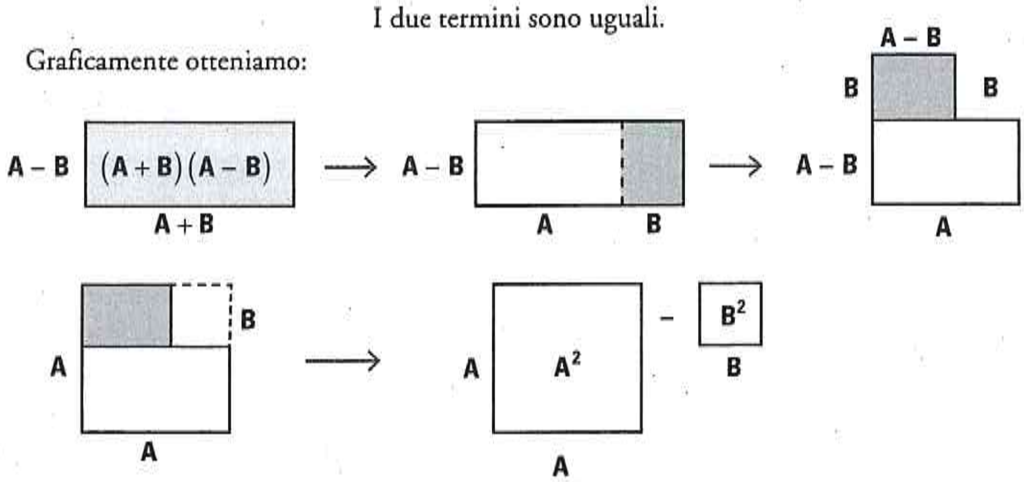
$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

Area di un rettangolo di lati A + B e A − B.

Differenza tra l'area di un quadrato di lato A e uno di lato B.

I due termini sono uguali.

Graficamente otteniamo:



ESEMPIO 8

$(x+y)(x-y)=$

$=x^2-y^2$

Per utilizzare la formula $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ poniamo $A=x$ e $B=y$ ottenendo il risultato.

A

$\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right) =$ $= \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2$	Poniamo $A = \frac{1}{2}a$ e $B = \frac{1}{3}b$ ottenendo il risultato.
$\left(-xy^2 + x^2\right)\left(-xy^2 - x^2\right) =$ **Attenzione!** In questo caso dobbiamo porre $A = -xy^2$ e $B = x^2$, ottenendo il risultato. $= x^2y^4 - x^4$	
$(2x - 3b)(-2x - 3b)\left(4x^2 + 9b^2\right) =$ $= \left(9b^2 - 4x^2\right)\left(4x^2 + 9b^2\right) =$ $= 81b^4 - 16x^4$	Svolgiamo il prodotto tra i primi due fattori, ponendo $A = -3b$ e $B = 2x$, ottenendo: eseguiamo di nuovo il prodotto ponendo ora $A = 9b^2$ e $B = 4x^2$; eseguiamo le potenze arrivando al risultato.

Ricorda

$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$; A è il termine identico nei due fattori, mentre B è il termine che cambia segno.

COMPLETA

Completa.

42 $(ax - 1)(ax + 1) = (ax)^{\dots\dots} - \dots\dots$

43 $(0,\bar{2}t - 1)(1 + 0,\bar{2}t) = \left(\frac{2}{\dots\dots}\right)^{\dots\dots} - \dots\dots = \dots\dots$

44 $\left(-x^2y - 1\right)\left(x^2y - 1\right) = (-1)^{\dots\dots} - \dots\dots = 1 - \dots\dots$

45 $\left(1 - a^2 + ab\right)\left(1 - a^2 - ab\right) = (\dots\dots) - (ab)^{\dots\dots} = 1 - \dots\dots$

Per approfondire

$(a - 2b + 1)(a + 2b - 1) =$

Attenzione!

In questo caso dobbiamo porre $A = a$ e $B = 2b - 1$, ottenendo:

$= a^2 - (+2b - 1)^2 =$ eseguiamo i quadrati:

$= a^2 - \left(4b^2 - 4b + 1\right) =$ togliamo la parentesi e arriviamo al risultato.

$= a^2 - 4b^2 + 4b - 1$

ESERCIZI

Esegui i seguenti prodotti di somme per differenze.

46 $(x - 3)(x + 3)$

47 $(2 - 3a)(2 + 3a)$

48 $(1 - xy)(1 + xy)$

49 $(ab - 1)(ab + 1)$

50 $(-4a + x)(-4a - x)$

51 $(-y - 1)(-y + 1)$

52 $(9x - 5y)(-9x - 5y)$

53 $\left(\frac{1}{2} - ab\right)\left(\frac{1}{2} + ab\right)$

54 $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)\left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)$

55 $\left(-xy^2 + x^2y\right)\left(xy^2 + x^2y\right)$

56 $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x^3y^3\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^3y^3\right)$